ダム問題に対する反復解法の収束 (微分方程式の数値解法と線形計算)

鈴木, 貴; 土屋, 卓也

数理解析研究所講究録 1320 巻 2003 年 1-6

ダム問題に対する反復解法の収束

鈴木 貴 (大阪大学基礎工) [1]　　土屋 卓也 (愛媛大学理学部) [2]

アブストラクト　この論文では，自由境界問題の典型であるダム問題に対する反復解法の収束について議論する．そのために，ダム問題に対する新たな変分原理を導入する．その変分原理はダム問題の解の候補者 (admissible domain と呼ぶ) の集合上で定義されるものである．ダムの形状に適当に条件を課せば，各 admissible domain は単連結であることがわかり，よって単位円上で定義された等角写像の像としてみることができる．よって，ダム問題に対する反復解法の収束を証明するためには，単位円上で定義された等角写像の列の収束を証明すればよいことになる．単位円上の等角写像列の収束を示すには，極小曲面の理論を応用すれば良いことがわかった．詳しい内容は，プレプリント "Convergence of trial boundary methods for the two-dimensional filtration problem", by T. Suzuki, T. Tsuchiya に発表する．

1 問題の設定とこれまでの研究

土やコンクリートなどの浸透性の材質によって作られるダムを設計する際に，ダム内部での浸透流の様子を解析する必要がある．特に，ダム内部の浸透流の表面の形状を知ることが重要である．この，ダム内部の浸透流の領域とそのポテンシャル関数を求めよというのが,「**ダム問題**」(filtration problem, dam problem) である．ダム問題は，いわゆる「自由境界問題」の典型的な例として，多くの教科書に取り上げられている．例えば，[5], [10], [12], [14] などを参照してください．

数学的には，ダム問題は次のように定式化される．ダムの領域を $\mathcal{DAM}$ と表すことにする．応用上，領域 $\mathcal{DAM}$ は Lipschitz 領域と仮定しても問題ない．領域 $\mathcal{DAM}$ の境界は，3つの部分からなるとする: S_1, 不浸透の部分; S_2, 空気に接する部分; S_3, 水に接する部分．図 Figure 1.1 に状況を示した．

ダム $\mathcal{DAM}$ 内の水の流域を Ω で表す．すると，境界 $\partial\Omega$ は4つの部分に分られる:

$$\begin{aligned} &\Gamma_1 = S_1 && (\text{不浸透の部分}) \\ &\Gamma_2 \subset \mathcal{DAM} && (\text{自由境界}) \\ &\Gamma_3 = S_3 && (\text{水に接する部分}) \\ &\Gamma_4 \subset S_2 && (\text{空気に接する部分}) \end{aligned}$$

[1]Takashi SUZUKI, Graduate School of Engineering Science, Osaka University
[2]Takuya TSUCHIYA, Department of Mathematical Sciences, Ehime University

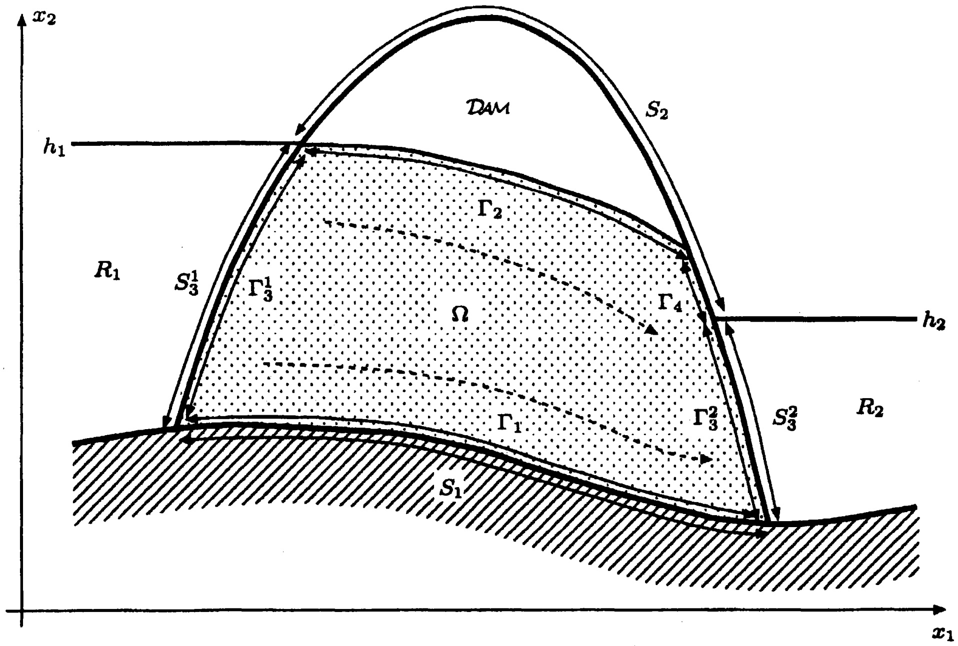

Figure 1.1: The configuration of the dam.

ここでは，ダムに接する水溜まり (reservoir) は R_j, $(j=1,2)$ の2つで，共に不浸透性の底部に接すると仮定する．その2つの水溜まり R_j, $(j=1,2)$ の水面の高さを h_j $(h_1>h_2)$ と表す．さらに $S_3^j:=\partial R_j \cap S_3$ とおく．もちろん，$S_3=S_3^1 \cup S_3^2$ である．流体の圧力を p とし，流体のピエゾメトリック (piezometric) 関数 u を $u(x):=p(x)+x_2$ と定義する．ただし，$x=(x_1,x_2)\in\Omega$ である．S_3^j において流体の圧力は h_j-x_2 のはずなので，S_3^j, $(j=1,2)$ においては $u=h_j$ である．境界 $S_2\cup S_3$ での u の値とその $\mathcal{D}\mathrm{AM}$ への拡張を u^0 と表すことにして，

$$
(1.1)\qquad u^0(x):=\begin{cases} h_j & \text{on } S_3^j, \quad (j=1,2), \\ x_2 & \text{on } S_2, \\ x_2 & \text{in } \mathcal{D}\mathrm{AM} \end{cases}
$$

と定義する．集合 $\mathbb{K}\subset H^1(\mathcal{D}\mathrm{AM})$ を

$$
(1.2)\qquad \mathbb{K}:=\left\{\zeta\in H^1(\mathcal{D}\mathrm{AM}) \;\middle|\; \zeta\ge 0 \text{ on } S_2,\ \zeta=0 \text{ on } S_3\right\}
$$

と定義する．以上の記号の準備の元で，ダムの問題は次のように定義される: 流域 $\Omega\subset\mathcal{D}\mathrm{AM}$ と Ω 上で定義され，

$$
(1.3)\qquad \begin{aligned} &\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\zeta \,\mathrm{d}x \le 0, \qquad \forall\zeta\in\mathbb{K}, \\ &u=u^0 \qquad \text{on } \Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4 \end{aligned}
$$

を満すピエゾメトリック関数 u を求めよ．ただし，'$\cdot$' は $\mathbb{R}^2$ の通常の内積を意味する．

ダルシー (Darcy) の法則によれば，u は流体の速度ポテンシャルになっている:

$$\mathbf{v} = -k\nabla u.$$

ただし，k は浸透係数である．ここでは，k は定数であると仮定する．流体の密度が定数だと仮定すると，u の $H^1(\Omega)$-seminorm $|u|^2_{H^1(\Omega)} = 2D_\Omega(u)$ は流体の運動エネルギーの定数倍に等しいことになる．ここで，$D_\Omega(v)$ は Dirichlet 積分を表す:

$$D_\Omega(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \mathrm{d}x \quad \text{for } v \in H^1(\Omega).$$

境界 $\partial\Omega$ にほんの少しの滑らかさを仮定することで，ダムの問題を以下のように読み替えることができる:

$$\begin{aligned}
&\Delta u = 0 && \text{in } \Omega,\\
&\frac{\partial u}{\partial n} = 0 && \text{on } \Gamma_1,\\
&u = u^0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 && \text{on } \Gamma_2,\\
&u = u^0 && \text{on } \Gamma_3,\\
&u = u^0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial n} \leq 0 && \text{on } \Gamma_4.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

ここで，$n := (n_1, n_2)$ は境界 $\partial\Omega$ 上の単位外法線である．自由境界 Γ_2 上では，Dirichlet 条件と Neumann 条件の両方が課せられていることに注意する．

ダムの形状が長方形の時，ダムの問題は Baiocchi [B] により解かれた．Baiocchi は，有名な Baiocchi 変換を使うことで，ダムの問題を変分不等式の形に再定式化し，ダムの問題の解の一意存在を示した．Baiocchi の論文の後，Baiocchi 自身と彼の Pavia スクールにより多くの研究がなされた ([BC], [BCMP] とその参考文献を参照)．しかし，結局 Baiocchi のアプローチでは，ダムが垂直の壁を持っている場合しか扱えないことがわかった．

数年後，Alt [A] と Brezis-Kinderlehrer-Stampacchia [BKS] は，まったく異なる方法でダムの問題を解決した．彼らは，一般的な形状のダムにおけるダム問題に対する新たな定式化を発見し，それを用いてダム問題の解の存在を示した．その定式化を用いたダム問題の解の一意性は，Alt-Gilardi [AG] と Carrillo-Chipot [CC] により示された．Alt と Brezis-Kinderlehrer-Stampacchia による新しいダム問題の定式化は，変分形式ではない．彼らの定式化は，ダム問題を特徴づける汎関数を持たない．筆者が知る限り，これまで一般のダム問題に対する，変分原理によるアプローチはないようである．また，Alt と Brezis-Kinderlehrer-Stampacchia の方法のもう一つの問題は，彼らの定式化は余り直感的でなく，彼らの定式化に基づく新たな数値スキームの設計が難しいことである．

2 反復スキームとその収束

通常工学のなどの現場では，ダム問題の数値解は次のような形で計算される．まず，自由境界に対する初期値 $\Gamma_2^{(1)}$ を “適当に” 設定する．ダム問題では，自由境界上でに 2 つの境界条件が課せられるが，そのうちの一つ，例えば Neumann 条件 $\partial u/\partial n = 0$ を $\Gamma_2^{(1)}$ に設定し，その上でポテンシャル関数 $u^{(1)}$ を計算する．もちろん，もう一つの条件，ここでは Dirichlet 条件は満されない．つまり，一般に $\Gamma_2^{(1)}$ 上で，$u^{(1)} \neq x_2$ となっている．計算の結果得られた $u^{(1)}$ のデータを用いて自由境界の初期値 $\Gamma_2^{(1)}$ を適当に変形し，2 番目の “自由境界”$\Gamma_2^{(2)}$ を設定する．この反復を，2 つの境界条件が $\Gamma_2^{(k)}$ 上で共に満されるまで繰り返す．この方法は，試行境界法 (trial boundary method)，仮想境界法 (fictitious boundary method) などと呼ばれ，工学では広く使われている．うまく反復を定義すると，試行境界法による得られる自由境界の候補者の列は，速やかに真の解と思われる境界に収束する．それにも関わらず，これまでのところ数値解の真の解への収束は，厳密に数学的な意味では，いまだに証明されていないようである．

この論文では，まず 2 次元のダム問題を変分問題として定式化する新たなアプローチを提案する．それを用いて試行境界法の収束を厳密に証明する．ここでの証明は，ある特定に反復スキームに対するものではなく，広いクラスの試行境界法に適用できるものであることを注意する．

ここで，試行境界法の “収束” と言った場合，2 つの意味があることに注意する．一つは試行境界法の反復の収束であり，もう一つは反復の結果得られた数値解（数値的に得られた自由境界の近似）の真の自由境界への収束である．我々のアプローチは，両方の “収束” について適用できる．

これまでの研究では，ダム問題は固定された領域 $\mathcal{DAM}$ 上の問題に変換され，求める流域 Ω は，$\mathcal{DAM}$ 上定義されたある関数 f により，

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{DAM} \mid f(x_1, x_2) > 0\},$$

という形で表された．このようなアプローチを “レベルセット (level set) 法” という．

我々のアプローチでは，「領域の変分」を扱う．まず，ダム問題の解の候補者である admissible な領域（$\mathcal{DAM}$ の部分集合である）を定義し，その集合 $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ を考える．次に，$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ 上に汎関数 J を定義する．そして，$\Omega \in \mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ がダム問題の解であるための必要十分条件は，$J(\Omega) = \inf_{\mathcal{A}_{\mathcal{D}}} J = 0$ であることを示す．ダム $\mathcal{DAM}$ の形状に対して緩やかな条件を課すと，全ての admissible な領域は単連結であることが示せる．よって，各 admissible 領域 $\Omega \in \mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ は，等角写像 φ_Ω による単位円の像であると見なすことができる．

さて，ここでダム問題が何らかの方法で離散化され，離散化された admissible 領域の集合が定義されたとしよう．同様に，汎関数 J も離散化され J_h が定義されたとする．すると，離散化されたダム問題の解 $\Omega_h \in \mathcal{A}_{\mathcal{D}}^h$ を，$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}^h$ 内で J_h の値を最小とするもの（つまり，$J_h(\Omega_h) = \inf_{\mathcal{A}_{\mathcal{D}}^h} J_h$ となるもの）と定義することは，自然であろう．パラメータ $h > 0$ で表される離散化の度合いを小さくしていくと，離散化されたダム問題の解の列 $\{\Omega_h\}_{h>0}$ ができる．これが，ダム問題の真の解に何らかの意味で収束することを

示したい．領域の列 $\{\Omega_h\}_{h>0}$ は，単位円上で定義された等角写像の列 φ_{Ω_n} と同一視できるが，これの収束については，極小曲面の理論が応用できることがわかった [11].

以上の結果の詳しい内容については，プレプリント "Convergence of trial boundary methods for the two-dimensional filtration problem", by T. Suzuki, T. Tsuchiya を参照してください．

参考文献

[1] H.W. ALT, A free boundary problem associated with the flow of ground water, Arch. Rational Mech. Anal., 64 (1977), 111-126.

[2] H.W. ALT, The fluid flow through porous media. Regularity of the free surface, Manuscripta Math., 21 (1977), 255-272.

[3] H.W. ALT, G. GILARDI, The behavior of the free boundary for the dam problem, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 9 (1982) 571-626.

[4] C. BAIOCCHI, Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 92 (1972), 107-127.

[5] C. BAIOCCHI, A. CAPELO, Variational and Quasivariational Inequalities. Applications to Free-Boundary Problems, Wiley 1984.

[6] C. BAIOCCHI, V. COMINCIOLI, E. MAGENES, G.A. POZZI, Free boundary problems in the theory fo fluid flow through porous media: Existence and uniqueness theorems, Ann. Mate. Appl. (4), 97 (1973), 1-82.

[7] H. BREZIS, D. KINDERLEHRER, G. STAMPACCHIA, Sur une nouvelle formulation du problème de l'écoulement à travers une digue, C. R. Acad. Sci. Paris 287 (1978), 711-714.

[8] J. CARRILLO MENENDEZ, M. CHIPOT, Sur l'unicité de la solution du problème de l'écoulement à travers une digue, C. R. Acad. Sci. Pairs 292 (1981), 191-194.

[9] L.A. CAFFARELLI, G. GILARDI, Monotonicity of the free boundary in the two-dimensional dam problem, Anal. Scu. Norm. Super. Pisa, 7 (1980), 523–537.

[10] M. CHIPOT, Variational Inequalities and Flow in Porous Media, Applied Mathematical Sciences 52, Springer-Verlag 1984.

[11] U. DIERKES, S. HILDEBRANDT, A. KÜSTER, O. WOHLRAB, Minimal Surfaces I. Boundary Value Problems., Spriger-Verlag 1992.

[12] A. FRIEDMAN, Variational Principles and Free-Boundary Problems, Wiley 1982.

[13] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed., Springer-Verlag 1983.

[14] D. KINDERLEHRER, G. STAMPACCHIA, An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications, Academic 1980.

[15] TAKUYA TSUCHIYA, On two methods for approximating minimal surfaces in parametric form, Math. Comp. 46 (1986), 517-529.

[16] TAKUYA TSUCHIYA, Discrete solution of the Plateau problem and its convergence, Math. Comp. 49 (1987), 157-165.

[17] TAKUYA TSUCHIYA, A note on discrete solutions of the Plateau problem, Math. Comp. 54 (1990), 131-138.

[18] TAKUYA TSUCHIYA, Finite element approximations of conformal mappings, Numer. Funct. Anal. Optim. 22 (2001), 419-440.